Printed Pages – 7

I-237

B.Sc. (Part-III) Examination, 2020

MATHEMATICS

Paper - II

(Abstract Algebra)

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 50

Minimum Pass Marks : 17

नोट : प्रत्येक प्रश्न के किन्हीं दो भागों को हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : Solve any two parts from each question. All questions carry equal marks.

इकाई–I / UNIT-I **5×2=10**

Q. 1. (a) सिद्ध कीजिए कि किसी समूह G का केन्द्र Z(G), G का प्रसामान्य उपसमूह होता है।

Prove that the centre Z(G) of a group G is normal subgroup of G.

(b) सिलो का द्वितीय प्रमेय लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove second Sylow's theorem.

(c) सिद्ध कीजिए कि किसी समूह G के सभी स्वाकारिताओं का समुच्चय प्रतिचित्रणों के संयोजन को संयोजन के रूप में लेने के सापेक्ष एक समूह निर्मित करता है।

The set of all automorphism of a group G form a group with respect to composition of mapping as the composition.

इकाई–II / UNIT-II **5×2=10**

Q. 2. (a) यदि f, वलय (R, +, •) से आच्छादक वलय (R′, +′, •′) पर एक समाकारिता है, तब सिद्ध कीजिए कि $(R/\ker f, +, \cdot) \cong (R' +' \cdot')$ **5×2=10**

If f is a homomorphism from a ring (R, +, •) onto a ring (R′, +′, •′) then $(R/\ker f, +, \cdot) \cong (R' +' \cdot')$.

(b) परिमेय संख्याओं के क्षेत्र Q पर परिभाषित बहुपदों $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + x - 2$ तथा $g(x) = x^2 - x - 2$ का महत्तम समापर्वतक (gcd) ज्ञात कीजिए तथा इसे दो एकघाती बहुपदों के संचय के रूप में व्यक्त कीजिए।

Find the greatest common divisor of following polynomials on the field Q & express it as a linear combination of two polynomial

$f(x) = 2x^3 - 4x^2 + x - 2$ & $g(x) = x^2 - x - 2$.

(c) एक R-माडयूल M के दो उपमाड्यूलों का सर्वनिष्ठ भी M का एक उपमाड्यूल होता है।

The intersection of two sub-modulus of an R-module M is also a submodule of M.

इकाई–III / UNIT-III **5×2=10**

Q. 3. (a) किसी सदिश समष्टि V(F) के एक अरिक्त उपसमुच्चय W, V का एक उपसमष्टि होगा यदि और केवल यदि $a, b \in F$ तथा $\alpha, \beta \in W \Rightarrow a\alpha + b\beta \in W$, $\forall\ \alpha, \beta \in W$.

The necessary & sufficient condition for a nonempty subset W of a vector space V(F) to be a vector subspace is $a, b \in F$ and $\alpha, \beta \in W \Rightarrow a\alpha + b\beta \in W$, $\forall\ \alpha, \beta \in W$.

(b) दर्शाइये कि सदिश (2, 1, 4), (1, −1, 2), (3, 1, −2) R^3 के लिए एक आधार निर्मित करते है।

Show that the vector (2, 1, 4), (1, –1, 2), (3, 1, –2) form a basis for R^3.

(c) यदि W एक परिमितविमीय सदिश समष्टि V(F) का एक उपसमष्टि है, तब दर्शाइये कि :

$$\dim \frac{V}{W} = \dim V - \dim W$$

If W is a subspace of a finite dimensional vector subspace V(F) then :

$$\dim \frac{V}{W} = \dim V - \dim W$$

इकाई–IV / UNIT-IV **5×2=10**

Q. 4. (a) सिद्ध कीजिए प्रत्येक n-विमीय सदिश समष्टि V(F), $V_n(F)$ से तुल्याकारी होती है।

Prove that every n-dimensional vector subspace V(F) is isomorphic to $V_n(F)$.

(b) एक रैखिक रूपान्तरण $T : V_2 \rightarrow V_3$ निम्न रूप से परिभाषित है $T(x_1\ x_2) = (x_1 + x_2, 2x_1 - x_2, 7x_2)$ यदि $B = \{e_1\ e_2\}$, $B' = \{e'_1\ e'_2\ e'_3\}$ क्रमशः V_2 व V_3 के प्रमाणिक आधार है तो इन आधारों के सापेक्ष T का आव्यूह ज्ञात कीजिए।

A linear transformation $T : V_2 \rightarrow V_3$ is defined by $T(x_1\ x_2) = (x_1 + x_2, 2x_1 - x_2, 7x_2)$ if $B = \{e_1\ e_2\}$ & $B' = \{e'_1\ e'_2\ e'_3\}$ be the standard bases of V_2 & V_3 respectively then find the matrix T with respect to these bases.

(c) दिखाइये कि निम्न आव्यूह A विकर्णीय है :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Show that matrix A is diagonalizable where :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

इकाई–V / UNIT-V 5×2=10

Q. 5. (a) किसी आन्तर गुणन समष्टि V(F) में किन्हीं भी दो सदिशों α, β के लिए सिद्ध कीजिए कि : **5×2=10**

$$|(\alpha, \beta)| \leq \|\alpha\|\,\|\beta\|$$

In an inner product space V(F) for any two vectors α, β prove that :

$$|(\alpha, \beta)| \leq \|\alpha\|\,\|\beta\|$$

(b) ग्राम-श्मिट के लांबिक प्रक्रम का प्रयोग करके $V_3(R)$ के आधार $B = \{\beta_1\ \beta_2\ \beta_3\}$ से एक प्रसमान्य लांबिक आधार प्राप्त कीजिए जहाँ $\beta_1 = (1, 0, 1)$, $\beta_2 = (1, 2, -2)$, $\beta_3 = (2, -1, 1)$

Apply Gram-Schmidt orthogonalization process to obtain an orthonormal basis from basis $B = \{\beta_1\ \beta_2\ \beta_3\}$ where $\beta_1 = (1, 0, 1)$, $\beta_2 = (1, 2, -2)$, $\beta_3 = (2, -1, 1)$.

(c) सिद्ध कीजिए कि $V_2(R)$ में $(\alpha, \beta) = a_1b_1 - a_2b_1 - a_1b_2 + 2a_2b_2$ जहाँ $\alpha = (a_1, a_2)$, $\beta = (b_1, b_2) \in V_2(R)$ एक आन्तर गुणन समष्टि है।

Prove that $V_2(R)$ is an inner product space with an inner product defined on $\alpha = (a_1, a_2)$, $\beta = (b_1, b_2) \in V_2(R)$ by $(\alpha, \beta) = a_1b_1 - a_2b_1 - a_1b_2 + 2a_2b_2$.