J-237

B.Sc. (Part-III) Examination, 2021

MATHEMATICS

Paper - II

(Abstract Algebra)

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 50

Minimum Pass Marks : 17

नोट : सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न/इकाई से किन्हीं दो भागों को हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : All questions are compulsory. Answer any two parts from each question/unit. All questions carry equal marks.

इकाई–I / UNIT-I

Q. 1. (a) माना G एक समूह हो तथा g समूह G का एक निश्चित अवयव है, तब प्रतिचित्रण $T_g : G \to G$ जो $T_g(x) = gxg^{-1}$, $\forall\ x \in G$ के द्वारा परिभाषित है, G की एक स्वाकारिता है। सिद्ध कीजिए।

Let G be a group and g be a fixed element of G. Then prove that the mapping $T_g : G \to G$ defined by $T_g(x) = gxg^{-1}$, $\forall\ x \in G$ is an automorphism of G.

(b) माना G एक समूह है, f, G की एक स्वाकारिता है; N, G का एक प्रसामान्य उपसमूह है। सिद्ध कीजिए कि f(N), G का एक प्रसामान्य उपसमूह है।

Let G be a group f an automorphism of G, N a normal subgroup of G. Prove that f(N) is a normal subgroup of G.

(c) माना G एक परिमित अन-आबेली समूह है और $p \mid O(G)$ जहां p एक अभाज्य संख्या है, तब सिद्ध कीजिए G में एक अवयव a का अस्तित्व इस प्रकार है कि $O(a) = p$.

If G is a finite group, p is a prime number and $p \mid O(G)$, then prove that G has an element such that $O(a) = p$.

इकाई–II / UNIT-II

Q. 2. (a) यदि ϕ एक वलय R की एक वलय R' में एक वलय समाकारिता है, तो सिद्ध कीजिए कि :

(i) $\phi(O) = O'$ जहां O और O' वलयों R और R' की क्रमशः योज्य तत्समिकाएं हैं।

(ii) $\phi(-a) = -\phi(a) \ \forall \ a \in R$

If ϕ be a ring homomorphism from R onto R' then prove that :

(i) $\phi(O) = O'$ where O and O' are additive identities of rings R and R' respectively.

(ii) $\phi(-a) = -\phi(a) \ \forall \ a \in R$

(b) सिद्ध कीजिए कि एक वलय की दो गुणजावलियों का सर्वनिष्ठ एक गुणजावली होता है।

Prove that the intersection of two ideals of a ring is an ideal.

(c) सिद्ध कीजिए कि एक वलय की प्रत्येक विभाग वलय, वलय की समाकारिक प्रतिबिम्ब है।

Prove that every quotient ring of a ring is homomorphic image of the ring.

इकाई–III / UNIT-III

Q. 3. (a) सिद्ध कीजिए कि एक सदिश समष्टि V(F) का एक अरिक्त उपसमुच्चय W, सदिश उपसमष्टि होगा यदि और केवल यदि

$\forall \ \alpha, \beta \in W$ और $a, b \in F \Rightarrow a\alpha + b\beta \in W$

Prove that a non-empty subset W of vector space is a vector subspace if and only if :

$\forall \ \alpha, \beta \in W$ and $a, b \in F \Rightarrow a\alpha + b\beta \in W$

(b) जाँच कीजिए कि सदिशों (2, 3, 1), (−1, 4, −2) एवं (1, 18, −4) का समुच्चय $V_3(R)$ में रैखिकतः स्वतंत्र है या परतन्त्र ?

Examine whether the set of vectors (2, 3, 1), (–1, 4, –2) and (1, 18, –4) is linearly independent or dependent in $V_3(R)$?

(c) माना कि V(F) एक परिमित विमीय सदिश समिष्ट है जिसका W एक परिमित विमीय उपसमिष्ट है। तब सिद्ध कीजिए कि :

$$\text{विमा } \frac{V}{W} = \text{ विमा } V - \text{ विमा } W$$

Let V(F) be a finite dimensional vector space and also let W be a finite dimensional vector subspace of V(F). Then prove that :

$$\dim\frac{V}{W} = \dim V - \dim W$$

इकाई–IV / UNIT-IV

Q. 4. (a) माना कि क्षेत्र F पर U एवं V सदिश समिष्ट है और $f : U \to V$ रैखिक प्रतिचित्रण है तो सिद्ध कीजिए कि :

(i) f का परास अर्थात् $I_m f = \{f(x) : x \in U\}$ समिष्ट V का उप समिष्ट होगा।

(ii) f एकैकी है यदि और केवल यदि अष्टि f = {0}

Let U and V be two vector spaces over field F and let $f : U \to V$ be a linear mapping. Then prove that :

(i) The range of f, namely $I_m f = \{f(x) : x \in U\}$ is a subspace of V.

(ii) f is one-one if and only if ker f = {0}

(b) दर्शाइए कि निम्नलिखित आव्यूह A विकर्णनीय है :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Show that the matrix A is diagonalizable where :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(c) निम्न रैखिक रूपान्तरण के लिये जाति शून्यता प्रमेय सत्यापित कीजिए $T : V_3 \to V_3$:

$T(e_1) = e_1 - e_2$

$T(e_2) = 2e_2 + e_3$

$T(e_3) = e_1 + e_2 + e_3$

Verify Rank-nullity theorem for linear transformation $T : V_3 \to V_3$:

$T(e_1) = e_1 - e_2$

$T(e_2) = 2e_2 + e_3$

$T(e_3) = e_1 + e_2 + e_3$

इकाई–V / UNIT-V

Q. 5. (a) यदि V, F पर एक आन्तर गुणन समिष्ट हो तथा $u, v \in V$ तो सिद्ध कीजिए कि :

$$|(u,v)| \le \|u\| \, \|v\|$$

If V be an inner product space over F and u, $v \in V$ then prove that :

$$|(u,v)| \le \|u\| \, \|v\|$$

(b) यदि x और y वास्तविक आन्तर गुणन समिष्ट में सदिश हो तथा यदि $\|x\| = \|y\|$ तो सिद्ध कीजिए कि x + y एवं x – y लांबिक होते हैं।

If x and y are vectors in a real inner product space and if $\|x\| = \|y\|$ then prove that x + y and x – y are orthogonal.

(c) दर्शाइये कि प्रत्येक परिमित विमीय आन्तर गुणन समिष्ट एक प्रसामान्य लांबिक आधार रखता है।

Show that every finite dimensional inner product space has an orthonormal basis.