Printed Pages – 7

J-111

B.A. (Part-III) Examination, 2021

MATHEMATICS

Paper - I

(Analysis)

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 50

Minimum Pass Marks : 17

नोट : सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न से किन्हीं दो भागों को हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : All questions are compulsory. Answer any two parts from each question. All questions carry equal marks.

इकाई–I / UNIT-I

Q. 1. (a) ''डिरिख्ले का परीक्षण'' लिखकर, सिद्ध करें।

State and prove, "Dirichlet's test".

(b) यदि एक वास्तविक मान फलन $f(x, y)$ के प्रान्त $D \subset R^2$ का कोई अवयव (a, b) इस प्रकार है कि f_x तथा f_y दोनों बिन्दु (a, b) पर अवकलनीय है, तब $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$.

If (a, b) be a point of the domain $D \subset R^2$ of the function f such that f_x and f_y are both diferentiable at (a, b), then $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$.

(c) अन्तराल $-\pi < x < \pi$ में फलन $f(x) = e^{-x}$ के लिए फोरियर श्रेणी ज्ञात कीजिए।

Obtain the Fourier series for $f(x) = e^{-x}$ in the interval $-\pi < x < \pi$.

इकाई–II / UNIT-II

Q. 2. (a) यदि f तथा g, अन्तराल $[a, b]$ में परिबद्ध फलन है, तब अन्तराल $[a, b]$ के विभाजन σ के लिए, सिद्ध करें :

(1) $U[f+g,\sigma] \le U[f,\sigma]+U[g,\sigma]$

(2) $L[f+g,\sigma] \ge L[f,\sigma]+L[g,\sigma]$

If σ is any partition of interval [a, b] and f and g are bounded functions on [a, b], then prove that :

(1) $U[f+g,\sigma] \le U[f,\sigma]+U[g,\sigma]$

(2) $L[f+g,\sigma] \ge L[f,\sigma]+L[g,\sigma]$

(b) ''कलन की द्वितीय मूल प्रमेय'' लिखकर, सिद्ध करें।

State and prove, "Second Fundamental Theorem of Calculus".

(c) समाकल $\int_0^1 x^{n-1}\log x\,dx$ की अभिसारिता का परीक्षण कीजिए।

Test the convergence of integral :

$$\int_0^1 x^{n-1}\log x\,dx$$

इकाई–III / UNIT-III

Q. 3. (a) सिद्ध करें : एक विश्लेषित फलन के वास्तविक एवं काल्पनिक भाग, लाप्लास समीकरण को सन्तुष्ट करते हैं।

Prove that : Real and imaginary parts of an analytic function satisfy Laplace's equation.

(b) यदि z_1, z_2 सम्मिश्र संख्याएँ हों, तब :

$$\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2$$

If z_1, z_2 are complex numbers then :

$$\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2$$

(c) w = f(z) को अनुकोण प्रतिचित्रण के रूप में दर्शाने के लिए आवश्यक प्रतिबन्ध को समझाइए।

Explain : Necessary condition for w = f(z) to represent a conformal mapping.

इकाई–IV / UNIT-IV

Q. 4. (a) माना (X, d) एक दूरीक समष्टि है, तब दर्शाइये कि :

$$d^*(x,y) = \min\{1, d(x,y)\} = \begin{cases} d(x,y) & \text{यदि } d(x,y) < 1 \\ 1 & \text{यदि } d(x,y) \geq 1 \end{cases}$$

से परिभाषित फलन, X पर एक परिबद्ध दूरीक है।

Let (X, d) be a metric space. Then prove that if :

$$d^*(x,y) = \min\{1, d(x,y)\} = \begin{cases} d(x,y) & \text{if } d(x,y) < 1 \\ 1 & \text{if } d(x,y) \geq 1 \end{cases}$$

then d is bounded metric on X.

(b) सीमा और सीमा बिन्दु में अन्तर लिखिये।

Write the difference between limit and limit point.

(c) सिद्ध करें : परिमेय संख्याओं का समुच्चय Q पूर्ण क्रमित क्षेत्र नहीं है।

Prove that : The set Q of all rational numbers is not complete ordered field.

इकाई–V / UNIT-V

Q. 5. (a) ''बेयर संवर्ग प्रमेय'' लिखकर, सिद्ध करें।

State and prove, "Baire's Category Theorem".

(b) सिद्ध करें : एक संहत दूरीक समष्टि, बोल्जानो वाइसट्रास गुण धर्म रखता है।

Prove that : A compact metric space has the Bolzano Weirstrass property.

(c) दर्शाइए कि प्रत्येक तुच्छ समष्टि एक सम्बद्ध समष्टि होता है।

Show that every indiscrete space is connected.